ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ ÁNH DƯƠNG

ĐẶC TRƯNG EULER
VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ ÁNH DƯƠNG

ĐẶC TRƯNG EULER VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Tạ Duy Phượng

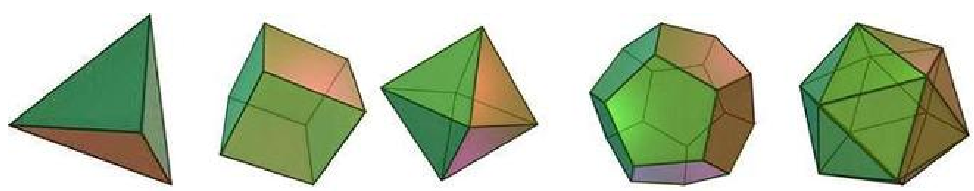
THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Lời nói đầu

Xét các khối đa diện đều sau

Tên	Đỉnh V	Cạnh E	Mặt F	$V - E + F$
Tứ diện	4	6	4	2
Hình lập phương	8	12	6	2
Bát diện	6	12	8	2
Thập nhị diện	20	30	12	2
Nhị thập diện	12	30	20	2



Hình 1

Ta nhận thấy $V - E + F = 2$ với tất cả năm khối đa diện trên. Số 2 không đổi được gọi là đặc trưng Euler.
Đặc trưng Euler, hay công thức $V - E + F = 2$ là một trong *17 phương trình làm thay đổi thế giới* (xem [1]). Do tính bản chất và quan trọng của công thức này, đặc trưng Euler có đến vài chục cách chứng minh (xem [5]) và có nhiều ứng dụng (xem thí dụ, [6]).
Đặc trưng Euler (còn được gọi là *bất biến Euler*, *công thức Euler*, hoặc *đặc trưng Euler-Poincaré*) là một bất biến tôpô, là số không đổi đặc trưng cho hình dạng hoặc cấu trúc của một không gian tôpô không phụ thuộc vào cách nó bị biến dạng. Đặc trưng Euler thường được ký hiệu là $\mathcal{X}$.
Đặc trưng Euler $\mathcal{X}(S)$ của một đa giác phẳng S được chia thành các tam giác bằng số đỉnh trừ đi số cạnh cộng với số mặt của tam giác trong đa

giác đó:

$$\mathcal{X}(S) = V - E + F.$$

Bất kỳ đa diện lồi cũng có đặc trưng

$$\mathcal{X} = V - E + F = 2,$$

trong đó V, E và F tương ứng là số đỉnh (góc), số cạnh và số mặt của khối đa diện.
Leonhard Euler, tên của ông được đặt cho khái niệm này, đã có các công trình nghiên cứu đầu tiên về đặc trưng này.
Ta cũng có thể mở rộng đặc trưng Euler (tức công thức $\mathcal{X} = 2$) cho hình cầu và áp dụng cho các khối đa diện cầu.

Luận văn được chia làm ba chương.
Chương 1. Một số kiến thức sơ lược về lý thuyết đồ thị.
Chương 2. Một số cách chứng minh công thức đặc trưng Euler.
Chương 3. Một số ứng dụng và bài toán liên quan.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến PGS. TS. Tạ Duy Phượng, người thầy đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn để tôi có thể hoàn thành luận văn này.
Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các Thầy cô giáo thuộc khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập tại trường.
Tôi cũng xin bày tỏ lời cảm ơn sâu sắc đến trường trung học phổ thông Lê Chân đã quan tâm và tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và công tác.
Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè đồng nghiệp đã cổ vũ, động viên và tạo điều kiện để tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2018

Tác giả

Trần Thị Ánh Dương

Chương 1

Một số kiến thức sơ lược về lý thuyết đồ thị

Chương này trình bày sơ lược các khái niệm cơ bản của lý thuyết đồ thị để bổ trợ cho một số cách chứng minh công thức đặc trưng Euler dựa trên lý thuyết đồ thị trong chương sau. Nội dung chính của chương được tham khảo từ tài liệu [2,3,9].

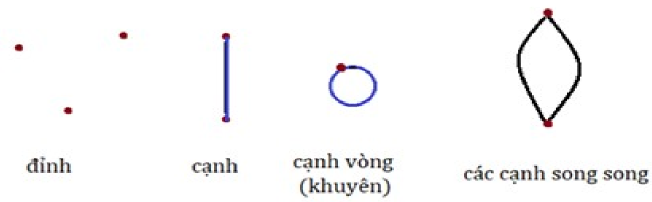
1.1. Định nghĩa đồ thị

1.1.1. Định nghĩa 1

Đồ thị (graph) $G = (V, E)$ là một bộ gồm các đỉnh V và các cạnh E, trong đó $V \neq \emptyset$ và mỗi cạnh nối với hai đỉnh (không nhất thiết phân biệt).

Nếu cạnh e tương ứng với hai đỉnh u, v thì ta nói u và v là hai đỉnh kề nhau. Ký hiệu $e = (u, v)$ hay $e = (v, u)$. Cạnh (u, u) tương ứng với hai đỉnh trùng nhau gọi là một *vòng* hay *khuyên*(loop) tại u. Hai cạnh phân biệt cùng tương ứng với một cặp đỉnh được gọi là *hai cạnh song song* hay *cạnh bội*.

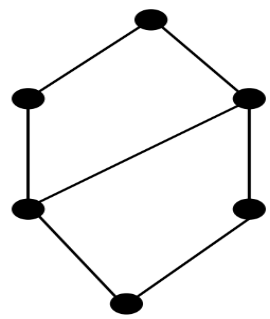
Cặp đỉnh không sắp thứ tự được gọi là *cạnh vô hướng* (*cạnh*). Cặp đỉnh sắp thứ tự được gọi là *cạnh có hướng* (*cung*).



Hình 1.1

1.1.2. Định nghĩa 2

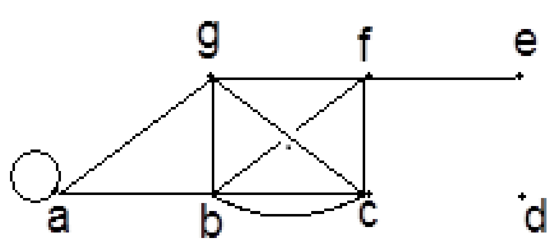
Đồ thị G được gọi là *đồ thị vô hướng* nếu tất cả các cạnh của G đều là cạnh vô hướng.



Hình 1.2

Bậc của một đỉnh trong đồ thị vô hướng là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó.
Kí hiệu là: $deg(v)$.
- Đỉnh bậc 0 được gọi là *đỉnh cô lập*.
- Đỉnh có bậc bằng 1 được gọi là *đỉnh treo*.

Ví dụ. Cho đồ thị sau:



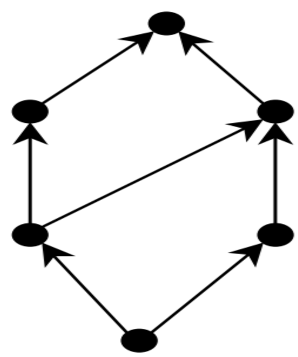
Hình 1.3

Ta có: $deg(a) = 4, deg(b) = 5, deg(c) = 4, deg(d) = 0, deg(e) = 1,$

$deg(f) = 4, deg(g) = 4.$

1.1.3. Định nghĩa 3

Đồ thị G được gọi là *đồ thị có hướng* nếu tất cả các cạnh của G đều là cạnh có hướng.



Hình 1.4

1.1.4. Định nghĩa 4

Đồ thị G_1 được gọi là *đồ thị con* của đồ thị G nếu tập đỉnh và tập cạnh của G_1 tương ứng là tập con của tập đỉnh và tập cạnh của G.

1.2. Chu trình

Đường đi (path) có độ dài n từ v_0 đến v_n với n là một số nguyên dương, trong một đồ thị vô hướng là một dãy các cạnh liên tiếp $v_0v_1, v_1v_2, ..., v_{n-1}v_n$. Đỉnh v_0 được gọi là *đỉnh đầu*, đỉnh v_n được gọi là *đỉnh cuối*.

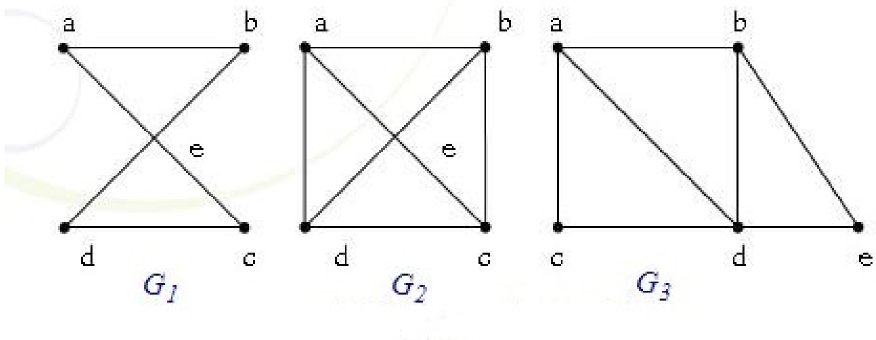
Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối gọi là *chu trình*.

Đường đi (Chu trình) không qua cạnh nào lần thứ hai gọi là *đường đi đơn* (*Chu trình đơn*).

Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị được gọi là *chu trình Euler*.

Đồ thị vô hướng được gọi là *đồ thị Euler* nếu nó có chu trình Euler.

Ví dụ. Trong Hình 1.5, đồ thị G_1 có chu trình Euler: a, e, c, d, e, b, a. Cả hai đồ thị G_2 và G_3 không có chu trình Euler.

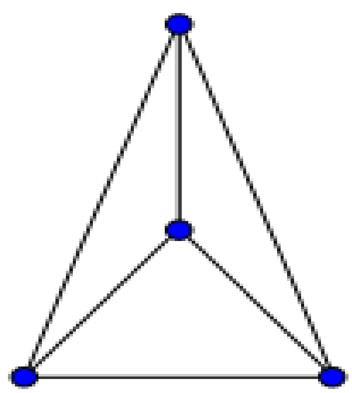


Hình 1.5

1.3. Một số dạng đồ thị

1.3.1. Đồ thị phẳng

Đồ thị G là đồ thị phẳng nếu có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài ở đỉnh.



Hình 1.6

1.3.2. Đồ thị đối ngẫu

Đồ thị đối ngẫu của một đồ thị phẳng G là một đồ thị G' trong đó có một đỉnh tương ứng cho mỗi miền mặt phẳng của đồ thị G và có mỗi cạnh tương ứng với mỗi cạnh của G kết nối hai miền kề nhau của G.